La polémica entre sintaxis y semántica en Post, Lewis y Wittgenstein

Víctor Aranda[7]

Resumen

En lógica, la idea de que la sintaxis y los cálculos proporcionan una precisión y un rigor de los cuales carece la semántica es relativamente común. El objetivo del presente artículo es analizar las raíces históricas de esta idea. Para ello, nuestro punto de partida será la tesis doctoral de Post, donde se prueba la corrección y la completud de la lógica proposicional. Las tablas de verdad se desarrollan con una actitud cautelosa hacia los significados, que se consideran "ajenos" al sistema formal. Esta actitud proviene de Lewis, quien defendía que su "concepción heterodoxa" de la lógica debía confrontarse con la filosofía de las matemáticas de los *Principia*. Para esta concepción, un sistema formal es una cadena de signos que pueden manipularse por medio de reglas puramente sintácticas. Defendemos que este punto de vista es compartido no solo por Post y Lewis, sino también por Wittgenstein. Sin embargo, la consecución de resultados metalógicos más importantes (como la completud de la lógica de primer orden) requerirá nuevas herramientas semánticas que fueron dominadas en la escuela de Hilbert.
Palabras Clave: historia de la lógica, tablas de verdad, protosemántica, completud, *Principia*.

[7]Universidad Autónoma de Madrid, España: `victor.aranda@uam.es`

The controversy between syntax and semantics in Post, Lewis and Wittgenstein

Abstract

In logic, the idea that the syntax and the *calculi* provide an accuracy and a rigour which is lacking in semantics is relatively common. The purpose of the present paper is to analyze the historical roots of this idea. In that connection, our starting point will be Post's doctoral dissertation, where soundness and completeness are proved for propositional logic. Truth tables were developed with a cautious attitude towards meanings, which are considered "extraneous" to the formal system. This attitude comes from Lewis, who argued that his "heterodox conception" of logic should be confronted with *Principia*'s philosophy of mathematics. For this concepction, a formal system is a string of signs which can be manipulated by means of purely syntactic rules. We claim that this point of view is shared not only by Post and Lewis, but also by Wittgenstein. However, the achievement of major metalogical results (like the completeness of first-order logic) will requiere new semantic tools which were mastered in the Hilbert school.
Keywords: history of logic, truth tables, protosemantics, completeness, *Principia*.

2.1. Introducción: la completud y el principio de prioridad de la sintaxis

Teorías, cálculos y lógicas son solo algunas de las realidades matemáticas con las que acostumbra a trabajar cualquier lógico contemporáneo. Son, además, cosas en principio muy distintas: un conjunto de sentencias de cierto lenguaje formal al que podemos exigir que esté cerrado bajo consecuencia lógica (las teorías), un conjunto de reglas de inferencia (los cálculos) o una dupla formada por un lenguaje formal y una relación de consecuencia lógica a la que podemos añadir un cálculo (las lógicas[8]). Aunque de todas ellas cabe esperar, y es razonable hacerlo, que sean "completas", este artículo se centra en la completud de los cálculos y de las lógicas[9].

El sentido en que los cálculos y las lógicas son completos está relacionado con una idea intuitiva de "suficiencia". Así pues, un conjunto de reglas de inferencia, un cálculo, es –débilmente- completo si permite generar como teoremas lógicos (o sea, sin premisas) todas las fórmulas de cierto lenguaje que son válidas (es decir, verdaderas en toda interpretación). Si encontramos un cálculo que sea completo para una lógica concreta, entonces habremos probado que la clase de fórmulas válidas de esa lógica es, al menos, recursivamente numerable. No obstante, también podríamos llegar a saber, mediante traducciones entre lógicas, que una clase

[8] *Cf.* Manzano y Alonso (2014, p. 2).

[9] Para la relación entre la Post completud de una teoría y la completud de la lógica proposicional, *Cf.* Aranda (2019a).

de fórmulas válidas es recursivamente numerable sin haber desarrollado todavía un cálculo. En tal caso, tendríamos la certeza de que, para esa lógica, existe un cálculo completo.

De este modo, la propiedad de la completud puede interpretarse de dos maneras. Según Alonso (2013, p. 79) cabe tanto una lectura "epistémica" como una lectura "computacional" de la completud. En la lectura epistémica, ponemos el énfasis en el hecho de que, si la lógica es completa y φ es una fórmula válida, sabemos que φ es un teorema lógico; en la computacional, en que la clase de fórmulas válidas pueda ser "construida" sin premisas a partir del cálculo. Mientras que la segunda sería la visión de Gödel o Kleene, la lectura epistémica sería la característica de matemáticos como Post. Considérese, por ejemplo, la forma en que este último enunciaba su conocido Teorema Fundamental: "a necessary and sufficient condition that a function of F be asserted as a result of the postulates II, III, IV is that all its truth values be +" (Post, 1921, p. 269).

Es decir, una fórmula F está aseverada (es, como veremos, un teorema lógico) si y solo si, en la tabla de verdad de F, la columna correspondiente a su conectiva principal solo contiene el signo para "verdadero", o sea, el signo + (si F es, pues, una tautología). Por tanto, siempre que F sea una tautología *sé*, por el Teorema Fundamental, que es un teorema lógico. De acuerdo con Alonso (2013, p. 80) esta lectura de la completud está íntimamente asociada al "principio de prioridad de la sintaxis" y a cierta polémica en torno al papel de la semántica:

(PS) Aunque en el análisis intuitivo la semántica sirve de guía, la sintaxis y el cálculo aportan un rigor del que la semántica carece.

De hecho, Manzano y Alonso (2014) argumentan que, durante la década de 1920, el uso de tablas de verdad y formas normales obedece a una "estrategia sintáctica" y no a una clara delimitación de los conceptos de "fórmula válida" o "interpretación". En este periodo, la semántica[10] era el estudio de los lenguajes formales a través del concepto modelo-teorético de "verdad", sino un conjunto de algoritmos y métodos de clasificación de fórmulas no enteramente separado de la sintaxis.

El objetivo de este artículo es rastrear ese "principio de prioridad de la sintaxis" y la polémica en torno a la semántica, pero partiendo de la tesis doctoral de Post (1921). No en vano, en ella se demuestra la completud de la lógica proposicional y encontramos la misma idea expresada más arriba:

> Let us denote the truth value of a proposition p by + if it is true and by − if it is false. This meaning of + and − is convenient to bear in mind as a guide to thought, but in the actual development that follows they are to be considered merely as symbols which we manipulate in a certain way (Post, 1921, p. 267).

[10] Manzano y Alonso (2014) proponen el término "protosemántica" para referirse al uso de tablas de verdad y formas normales durante la década de 1920.

Los significados son, desde este punto de vista, meras guías para el pensamiento que, dentro del sistema formal, no tienen cabida (+ y − son solo signos que manipulamos de una cierta manera). Esta actitud recelosa ante los significados está en la popular distinción de Ramsey (1925) entre las paradojas que son lógicas o matemáticas y las que no lo son[11]. Las segundas se habrían originado por permitir elementos psicológicos en nuestros formalismos. De hecho, Peano (1906) ya criticó la paradoja de Richard calificándola de producto lingüístico más que de genuino problema matemático. Por otro lado, Church (1956) hacía la siguiente advertencia a los lectores de su famoso “Introduction to Mathematical Logic”:

> From time to time in the following chapters we shall interrupt the rigorous treatment of a logistic system in order to make an informal semantical aside [...] *Except in this Introduction, semantical passages will be distinguishetl from others by being Printed in smaller type, the small type serving as a warning that the material is not part of the formal logistic development and must not be used as such* (Church, 1956, pp. 67-68).

Como se advierte, la semántica no se considera parte del “sistema logístico”, sobre el que es posible un tratamiento riguroso y formal, sino un material aparte al que conviene tratar con cierta cautela. Al igual que en Post (1921), las observaciones semánticas parecen puramente aclaratorias y, por esa razón, no deben confundirse con las expresiones bien formadas del lenguaje formal en cuestión. La pregunta es, pues, ¿de dónde viene esa actitud recelosa, que perduró al menos hasta 1956, hacia los significados? ¿Tiene algo que ver que se asumiera una “estrategia sintáctica” en la década de 1920 con la aparición de las primeras pruebas de completud para la lógica proposicional?

Lo cierto es que, aunque su lectura fuera epistémica y no computacional, Post (1921) probó la completud del fragmento proposicional de los *Principia*, algo que no lograron Whitehead y Russell (1910). Debido a ello, en la primera sección del artículo, compararé los axiomas de Whitehead y Russell (1910) con los de Post (1921), así como la manera en que se define la noción fundamental de “proposición aseverada”. Veremos que las diferencias entre uno y otro texto pueden explicarse, precisamente, por la cautela de Post ante la semántica y los significados. En la segunda sección, vincularé el punto de vista de Post con lo que Lewis (1918) denominaba la “concepción heterodoxa” de la lógica y explicaré en qué consiste. Luego, comentaré algunos pasajes de Wittgenstein (1922), donde parece criticar aspectos de Whitehead y Russell (1910) que Post dejó de lado en su tesis doctoral. Y, finalmente, discutiré si la escuela de Hilbert (que también obtuvo un resultado de completud para la lógica proposicional) adoptó esa “estrategia sintáctica” o no.

[11] “The contradictions of Group B are not purely logical, and cannot be stated in logical terms alone, for they all contain some reference to thought, language, or symbolism, which are not formal but empirical terms. So they may be due not to faulty logic or mathematics, but to faulty ideas concerning thought and language” (Ramsey, 1925, p. 353).

2.2. Breve comparación de la tesis doctoral de Post con los *Principia*

Asumiendo que la fórmula $\alpha \to \beta$ es una abreviatura de $\neg\alpha \lor \beta$, los axiomas de la lógica proposicional que son comunes a Whitehead y Russell (1910) y a Post (1921) son los siguientes[12]:

1. $\vdash p \lor p \to p$
2. $\vdash p \to p \lor q$
3. $\vdash p \lor q \to q \lor p$
4. $\vdash p \lor (q \lor r) \to (p \lor q) \lor r$
5. $\vdash (p \to q) \to [(r \lor p) \to (r \lor q)]$

Como se puede observar, los cinco axiomas están precedidos por el signo $\vdash$, que hoy leemos como "β es deducible a partir de α" cuando $\alpha \vdash \beta$. Que no haya ninguna fórmula a la izquierda del signo $\vdash$ significa, naturalmente, que la fórmula de la derecha es un teorema lógico. Sin embargo, en los *Principia* el primer axioma se leería "la fórmula $p \lor p \to p$ está aseverada[13]. Whitehead y Russell (1910, p. 92) admiten que adoptaron tanto la idea como la notación del signo de aserción de Frege. No obstante, las proposiciones de la lógica son lo que ellos llaman "funciones proposicionales", ya que contienen al menos un constituyente indeterminado[14]. Las únicas proposiciones que pueden ser aseveradas aun conteniendo al menos un constituyente indeterminado son las de la lógica, pues son todas ellas "generales":

> An assertion (for example) which is true of Socrates but not of Plato, will not belong to logic, and if an assertion which is true of both is to occur in logic, it must not be made concerning either, but concerning a variable x (Whitehead y Russell, 1910, p. 93).

La *generalidad* de funciones proposicionales como $p \lor p \to p$ implica que, independientemente de si sustituimos p por una proposición verdadera o por una proposición falsa, el resultado será una proposición verdadera. De ahí que pueda ser aseverada, aunque el significado de p esté indeterminado. Además, en virtud de la proposición primitiva 1.11, todo lo implicado por una función proposicional

[12] En los *Principia*, en lugar de paréntesis se usan el punto y los dos puntos. Los axiomas de la lógica proposicional son "proposiciones primitivas".

[13] "The sign $\vdash$ is called the assertion-sign; it may be read "it is true that" (although philosophically this is not exactly what it means)" (Whitehead y Russell, 1910, p. 92).

[14] Para una explicación detallada de los conceptos de "función proposicional" y "función proposicional aseverada", *Cf.* Aranda (2019b, pp. 47-50).

aseverada también es una función proposicional aseverada (*Cf.* Whitehead y Russell (1910, p. 95)). Evidentemente, las fronteras entre lo semántico y lo sintáctico son difusas.

Por otra parte, Post (1921) también introduce el concepto de "función proposicional aseverada". Tomando como primitivas la negación y la disyunción (y estipulando que, si p y q son proposiciones elementales, entonces $\neg p$ y $p \vee q$ también lo son), pueden construirse la totalidad de funciones proposicionales que son "proposiciones elementales" (o sea, expresiones de la lógica proposicional). No obstante, Post (1921, p. 267) asegura que la teoría descrita por las proposiciones 1-5 solo incluye un subconjunto de esas funciones: las que están precedidas por el signo $\vdash$. Esto es, las que son *teoremas lógicos*. Las proposiciones 1-5 "give us the start", es decir, nos permiten generar nuevas funciones proposicionales aseveradas (nuevos teoremas lógicos) a partir de las antiguas. La deducción se lleva a cabo aplicando las siguientes reglas de inferencia:

> II. The assertion of a function involving a variable p produces the assertion of any function found from the given one by substituting for p any other variable q, or $\neg q$, or $(q \vee r)$.
> III. $\vdash p$ and $\vdash \neg p \vee q$ produce $\vdash q$ (Post, 1921, p. 267).

Naturalmente, III es el modus ponens y II es la regla de sustitución[15]. En los *Principia*, la única regla de inferencia es el *modus ponens*. Sin embargo, Whitehead y Russell (1910, p. 94) afirman, extrañamente, que "if p is true, then if p implies q, q is true. This is a true proposition, but [...] we cannot express the principle symbolically". Esto se debe a que p y $p \rightarrow q$ tan solo son hipótesis, así que no pueden ser aseveradas. Las proposiciones pueden estar aseveradas o meramente consideradas; las proposiciones lógicas son funciones proposicionales aseveradas. Pero, a diferencia de Whitehead y Russell, Post (1921) no apela a su generalidad para justificar que estén aseveradas. Tampoco recurre al hecho de que, independientemente de cómo se resuelva la ambigüedad de sus constituyentes indeterminados, el resultado será una proposición verdadera. Post (1921) ofrece, más bien, un método algorítmico para decidir si una proposición elemental está o no aseverada.

En virtud del Teorema Fundamental, una proposición elemental está aseverada (es un teorema lógico) si y solo si es una función proposicional positiva. Que una función proposicional sea positiva, negativa o mixta puede determinarse en tiempo finito por medio de su tabla de verdad[16]. Como vimos, las positivas solo contienen, en la columna de su conectiva principal, el signo +; las negativas, solo el signo para

[15] Aunque se usa constantemente en los *Principia*, esta regla no se hace explícita. Fue Lewis (1918), de quien hablaremos más adelante, el primero en ofrecer una definición del operador de "sustitución" en un texto que estudió el propio Post.

[16] En una nota al pie, Post (1921, p. 267) comenta que los conceptos de "valor de verdad", "función proposicional" y la definición de la negación y la disyunción están en los *Principia*. Sin embargo, no sucede lo mismo con la noción general de "tabla de verdad", que Post atribuye a Jevons y Venn.

"falso", esto es, el signo −; las mixtas, uno y otro signo. Post (1921, p. 269) está distinguiendo, pues, entre tautologías, contradicciones y fórmulas contingentes.

Es importante señalar, como apuntan Manzano y Alonso (2014, pp. 7-9), que el resultado de completud implicado por el Teorema Fundamental no se obtuvo tratando de probar que las reglas de inferencia II y III son "suficiente" para generar un conjunto de fórmulas que quisiéramos poder construir y que hemos delimitado semánticamente. Muy al contrario, parece que el objetivo era clasificar las proposiciones elementales en las que son funciones proposicionales aseveradas y las que no. Y este método de clasificación de fórmulas debía, desmarcándose de los *Principia*, dejar de lado cualquier justificación "psicologista" de las proposiciones lógicas. De acuerdo con Post:

> Our most important theorem gives a uniform method for testing the truth of any proposition of the system; and by means of this theorem it becomes possible to exhibit certain general relations which exist between these propositions. These relations definitely show that the postulates of *Principia* are capable of developing the complete system of the logic of propositions without ever introducing results extraneous to that system (Post, 1921, p. 265).

La idea de que las proposiciones lógicas son funciones proposicionales que podemos aseverar a pesar de contener constituyentes indeterminados es todavía bastante informal. El teorema que establece que una función proposicional solo es una proposición lógica si su tabla de verdad únicamente devuelve el signo + es, en cambio, un resultado estrictamente matemático. La apelación a que puedan ser aseveradas parece algo ajeno al propio sistema formal (en palabras de Post, "extraneous to that system"). El rechazo de Post a este modo "psicologista" de hablar no es casual, pues él mismo afirma que su enfoque sobre el sistema de los *Principia* es puramente formal. "We have consistently regarded the system of *Principia* and the generalizations thereof as *purely formal developments*, and so have used whatever instruments of logic or mathematics we found useful" (Post, 1921, p. 266).

De hecho, este enfoque "puramente formal" se puede apreciar si comparamos de nuevo los axiomas de (Whitehead y Russell, 1910, pp. 94-97) con los de Post (1921, p. 266-67). Los axiomas 1-5 que expusimos más arriba son las proposiciones primitivas 1.2-1.6 de los *Principia*. Las proposiciones primitivas 1.7, 1.71 y 1.72 (las tres últimas) establecen la *gramática*[17] del lenguaje formal del fragmento proposicional. Las proposiciones primitivas 1.7 y 1.71 constituyen el primer grupo de axiomas de Post (1921), pero él sí las separa explícitamente de los axiomas 1-5. Estos constituyen el cuarto grupo de proposiciones primitivas de Post (grupo

[17]"1.7. If p is an elementary proposition, $\neg p$ is an elementary proposition. Pp.

1.71. If p and q are elementary propositions, $p \vee q$ is an elementary proposition. Pp.

1.72. If φp and ψp are elementary propositional functions which take elementary propositions as arguments, $\varphi p \vee \psi p$ is an elementary propositional function. Pp" (Whitehead y Russell, 1910, p. 97).

I, gramática; grupos II y III, cálculo; grupo IV, axiomas). A diferencia de lo que ocurría en los *Principia*, Post asegura que el resto de proposiciones primitivas se obtiene aplicando las reglas II y III solamente a las del grupo IV.

Por otro lado, las proposiciones primitivas 1.1 y 1.11 de los *Principia* (que estipulaban que cualquier fórmula implicada por una proposición o función proposicional aseverada también debía estarlo) desaparecen del listado de axiomas de Post (1921). En realidad, una expresión como “anything implied by a true elementary proposition is true” (Whitehead y Russell, 1910, p. 94) pertenece al *metalenguaje*, no al lenguaje objeto[18]. Es decir, se trata de una manera de asegurar que no obtendremos, deductivamente, proposiciones no aseveradas, lo cual es un resultado sobre el sistema formal, no un teorema del sistema. Aunque esta distinción entre teoremas y metateoremas no se encuentra en los *Principia*, Post sí es capaz de formularla:

> We here wish to emphasize that the theorems of this paper are about the logic of propositions, but are not included therein. More particularly, whereas the propositions of *Principia* are particular assertions introduced for their interest and usefulness in later portions of the work, those of the present paper are about the set of all such possible assertions (Post, 1921, p. 265).

Así, es evidente que el propio Post era consciente de la diferencia con los *Principia* en esta cuestión. Él atribuye su punto de vista (que, como vimos, es “puramente formal”) a Lewis (1918). En el próximo apartado, estudiaremos la crítica de este autor a Whitehead y Russell (1910), conectándolo con la “estrategia sintáctica” que motivó el método de tablas de verdad de Post y el descubrimiento de su Teorema Fundamental.

2.3. La “concepción heterodoxa” de la lógica y las matemáticas: Lewis

En una nota al pie, Post Post (1921, p. 266) admite que el punto de vista que él ha adoptado es el de Lewis (1918), quien denominaba a su enfoque “concepción heterodoxa” de la lógica y las matemáticas. Esta concepción es, en mi opinión, un claro ejemplo de esa actitud recelosa ante los significados que veíamos más arriba. Pues, en efecto, Lewis define el concepto de “sistema matemático” de la siguiente manera:

> *A mathematical system is any set of strings of recognizable marks in which some of the strings are taken initially and the remainder*

[18] “When we investigate the language of a formalized deductive science, we must always distinguish clearly between the language *about* which we speak and the language *in* which we speak” (Tarski, 1933, p. 167).

> *derived from these by operations performed according to rules which are independent of any meaning assigned to the marks* (Lewis, 1918, p. 355).

Esto es, un sistema formal no sería sino un conjunto de signos reconocibles que podemos manipular de acuerdo con ciertas reglas, pero esa manipulación es siempre independiente de cualquier *significado* asignado a dichos signos. Este punto de vista sobre la naturaleza de la lógica y las matemáticas, cercano al formalismo[19], debe confrontarse con el de Whitehead y Russell (1910). Lewis (1918, p. 354) llamaba “concepción ortodoxa” de la lógica al enfoque filosófico de los *Principia* y lo criticaba duramente. El primer argumento de Lewis contra esta “concepción ortodoxa” pone de manifiesto los compromisos metafísicos de Whitehead y Russell (1910). Para Lewis, las cuestiones acerca de la existencia de las clases, la jerarquía de tipos o las descripciones definidas tienen tan poco de matemáticas como la pregunta por la existencia de los fenómenos empíricos. Por tanto, este tipo de conceptos no son parte de nuestros sistemas formales; las matemáticas solo tratan con secuencias de signos. “Whatever the mathematician has in his mind when he develops a system, what he does is to set down certain marks and proceed to manipulate them in ways which are capable of the above description” (Lewis, 1918, p. 356).

El segundo argumento rechaza que las denotaciones jueguen algún papel en lógica. La cuestión del significado lógico de nuestros signos, o de su referente en el mundo externo, debería verse como una posible *aplicación* del simbolismo y no como algo interno al mismo. No obstante, en este punto Lewis no fue del todo justo con la filosofía de las matemáticas de Russell, porque en *Principles of Mathematics* (quince años antes) él ya distinguía entre “matemática pura” y ciencias experimentales:

> What pure mathematics asserts is merely that the Euclidean propositions follow from the Euclidean axioms –i.e. it asserts an implication [...] Thus, as dealt with in pure mathematics, the Euclidean and non-Euclidean Geometries are equally true: in each nothing is affirmed except implications. All propositions as to what actually exists, like the space we live in, belong to experimental or empirical science, not to mathematics (Russell, 1903, p. 5).

Por otro lado, y de nuevo contra Whitehead y Russell (1910), Lewis (1918, p. 358) afirma que no hay ideas primitivas en lógica. Las proposiciones primitivas

[19] Considérse el siguiente texto de Kleene como ejemplo de enfoque “formalista” en lógica:
“La teoría no es ya un sistema de proposiciones con pleno significado, sino de sentencias consideradas como secuencias de palabras, que son a su vez secuencias de letras. Por la sola referencia a la forma indicamos qué combinaciones de palabras son sentencias, qué sentencias son axiomas y qué sentencias se siguen como consecuencias inmediatas de otras” (Kleene, 1974, p. 63).

1.2-1.6 de los *Principia* se construyen por medio de ideas primitivas[20] como las de “negación”, “disyunción” o “aseveración”. Lewis considera que en lógica no debemos asumir nada como verdadero o aseverado; la disyunción y la negación son meras operaciones que transforman secuencias de signos en (nuevas) secuencias de signos. En tanto que no se asignará ningún significado a estas secuencias de signos, no puede decirse de ellas que sean verdaderas o falsas[21]. La esencia de la “concepción heterodoxa” de las matemáticas y la lógica es, por tanto, la de unas matemáticas *sin significado*:

> The distinctive feature of this definition lies in the fact that it regards mathematics as dealing, not with certain denoted things – numbers, triangles, etc.- nor with certain symbolized “concepts” or “meanings”, but solely with recognizable marks, and dealing with them in such way that it is wholly independent of any question as to what the marks represent. This might be called the “external view of mathematics” or “mathematics without meaning” (Lewis, 1918, p. 355).

Como se puede advertir, esta incipiente separación entre el lenguaje formal (entendido como una secuencia de signos) y su interpretación (esto es, su significado) no implica la emergencia de una semántica independiente, pero sí la autonomía de la sintaxis frente a los significados. No obstante, y como señala el propio Lewis, “the meticulous avoidance of any reference to “meanings” would be a piece of pedantry” (Lewis, 1918, p. 359). Lo realmente importante es, más bien, que las reglas y las operaciones de un sistema formal pretendidamente riguroso sean definidas sin ninguna referencia a la verdad o a los significados[22]. De este modo, la proposición primitiva 1.1 de los *Principia* (“anything implied by a true proposition is true”) no debería ser parte del sistema formal, lo cual explicaría por qué Post (1921) no la incluye –como tampoco incluye a la 1.11- en su conjunto de axiomas.

De esta perspectiva “heterodoxa” se sigue que la principal tarea del matemático es la de establecer reglas precisas de inferencia y obtener, aplicándolas, nuevas secuencias de signos a partir de las más antiguas. Idealmente, las secuencias de signos que buscamos generar deductivamente (o, dicho de otro modo, enumerar recursivamente) podrían ser clasificadas mediante un procedimiento algorítmico: esta es la utilidad específica de las tablas de verdad. En tal caso, la lógica no solo

[20] “Following Peano, we shall call the undefined ideas and the undemonstrated propositions primitive ideas and primitive propositions respectively. The primitive ideas are explained by means of descriptions intended to point out to the reader what is meant” (Whitehead y Russell, 1910, p. 91).

[21] “Mathematics, so developed, achieves the utmost economy of assertion. Nothing is asserted. There are no primitive ideas. Since no meanings are given to the characters, the strings are neither true nor false. Nothing is assumed to be true” (Lewis, 1918, p. 360).

[22] “The important consideration is the fact that *the operations of any abstract and really rigorous mathematical system are capable of formulation without any reference to truth or meanings*” (Lewis, 1918, pp. 359-60).

es completa, sino también *decidible*[23]. De hecho, el propio Lewis parece esbozar la idea intuitiva de lo que es un procedimiento de decisión:

> A machine, or machine-like process, will start from something given, take steps of a determined nature, and render the result, whatever it is [...] Is not just this ingenuity in controlling the destination of simple operations the peculiar skill which mathematics requires? (Lewis, 1918, p. 360).

Además, Lewis (1918) cita en numerosas ocasiones los trabajos de Jevons y Venn, quienes habían sido señalados por Post como precursores de sus tablas de verdad. Él explica brevemente cómo Jevons habría desarrollado un método tedioso de calcular las posibles combinaciones de n fórmulas (2^n) basado en lo que él llamaba "alfabeto lógico". "Thus, for two elements, a and b, the "logical alphabet" consists of ab, $a - b$, $-ab$, and $-a - b$" (Lewis, 1918, p. 74). Es decir, para a y b caben, exactamente, cuatro posibilidades (2^2): que a y b sean verdaderos; que a lo sea y b no; que lo sea b, pero a no; que ambos sean falsos. Habría que destacar, no obstante, que Jevons se inspiró en Boole (1854), cuya idea de la "expansión lógica de funciones[24]" también es citada por Post como precedente de su tabla de verdad (*Cf.* Post (1921, p. 267, fn. 6)).

En la siguiente sección, analizaré si la estrategia sintáctica y esa actitud recelosa ante los significados (ejemplificada por la *concepción heterodoxa* de Lewis) se encuentra también en una obra que, de forma independiente a Post (1921), presenta el método de tablas de verdad: el *Tractatus* de Wittgenstein.

2.4. El *Tractatus* de Wittgenstein como crítica a los *Principia*

En Wittgenstein (1922), hay varias referencias directas a los *Principia*, así como algunas observaciones interesantes sobre la "sintaxis lógica". La primera proposición al respecto, la 3.33, expresa la idea fundamental de Lewis (1918, 359-60) de que las reglas y operaciones de un sistema formal debían formularse sin referencia alguna a la verdad o a los significados. "It must be possible to establish logical syntax without mentioning the *meaning* of a sign: *only* the description of expressions may be presupposed" (Wittgenstein, 1922, 3.33).

[23]Que una lógica sea *decidible* significa que existe un algoritmo que determina, en tiempo finito, si una fórmula de su lenguaje pertenece o no al conjunto de fórmulas válidas de dicha lógica. Como señalan Manzano y Alonso (2014), "in fact, from a computational point of view this property of decidability surpasses completeness". Esta es la razón por la que (Alonso, 2013, p. 81) considera que la completud de una lógica que no es decidible es una suerte de second best (o "premio de consolación").

[24]"The expansion of $f(x)$ consists of two terms, x and $1 - x$, multiplied by the coefficients $f(1)$ and $f(0)$ respectively. And the expansion of $f(x, y)$ consists of the four terms xy, $x(1-y)$, $(1-x)y$, and $(1 - x)(1 - y)$, multiplied by the coefficients $f(1, 1)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(0, 0)$" (Boole, 1854, p. 75).

Y, al igual que Lewis (1918, pp. 354-56), Wittgenstein también critica a Russell por haber mencionado los significados cuando introducía ciertos recursos formales, y lo hace en la proposición inmediatamente posterior, la 3.331. A continuación, en la proposición 3.334, se retoma la misma idea: "the rules of logical syntax must go without saying, once we know how each individual sign signifies" (Wittgenstein, 1922, 3.334). Su tesis de que los significados no juegan ningún papel en el establecimiento de la sintaxis lógica pudo dar forma a su idea fundamental de que las constantes lógicas no representan nada[25]. En el mundo, dirá Wittgenstein en la proposición 4.0621, nada corresponde al signo $\neg$. En la proposición 5.4, afirma que, por esta razón, no hay "objetos lógicos" ni "constantes lógicas" en el sentido de Frege y Russell.

Por otro lado, para Wittgenstein las definiciones en un sistema formal no expresan nada sobre el significado de los signos. Así, $a = b$ quiere decir que el signo "a", ya conocido, es sustituido por el signo "b". La definición es, desde este punto de vista, una regla sígnica que no da ninguna información sobre lo definido. Se trataría, pues, de un recurso de la representación, nada más[26] (*Cf.* Wittgenstein (1922, 4.241-4.242)). Llevando este enfoque sintáctico al extremo, Wittgenstein sostiene, en la proposición 5.4611, que los signos lógicos son meros *signos de puntuación*.

Es este punto de vista, tan parecido al enfoque heterodoxo de Lewis (1918, p. 355), el que dará lugar a las tablas de verdad que Wittgenstein presenta a partir de la proposición 4.31. Los signos T y F representan lo mismo que los signos + y − en Post (1921), pero Wittgenstein los llama "posibilidades veritativas" (y representan, naturalmente el "darse y no darse" de los estados de cosas). Las posibilidades veritativas que hacen verdaderas una fórmula se denominan "fundamentos veritativos", de tal modo que una contradicción, por ejemplo, no tendría ningún fundamento veritativo (*Cf.* Wittgenstein (1922, 5.101)). Aunque, a diferencia de Post (1921), Wittgenstein (1922) no prueba ningún resultado metalógico importante, sí hace algunas apreciaciones interesantes al hilo de sus tablas de verdad.

En particular, quisiera destacar la noción de consecuencia que está defendiendo Wittgenstein en el *Tractatus*. Las proposiciones 5.11, 5.12, 5.121 y 5.122 explican cuándo una fórmula p se sigue de otra, sea esta q. "The truth of a proposition p follows from the truth of another proposition q if all the truth-grounds of the latter are truth-grounds of the former" (Wittgenstein 1922, 5.12). Es decir, p es consecuencia de q si y solo si toda fila de la tabla de verdad que asigna T a q también asigna T a p. Esta es la definición de "consecuencia tautológica[27]" y, si p es consecuencia tautológica de q, entonces p será consecuencia lógica de q. En otras palabras, si los fundamentos veritativos de p están incluidos en los de q, p se sigue de q (*Cf.* Wittgenstein (1922, 5.121)).

Otra similitud del *Tractatus* con Lewis (1918) es el rechazo a las ideas primiti-

[25] "My fundamental idea is that "logical constants" are not representatives; that there can be no representatives of the logic of facts" (Wittgenstein, 1922, 4.0312).

[26] "The identity-sign, therefore, is not an essential constituent of conceptual notation" (Wittgenstein, 1922, 5.533).

[27] *Cf.* Barker-Plummer et al. (2011, p. 113).

vas en lógica. El hecho de que las ideas primitivas de “condicional”, “disyunción”, “conjunción” o “negación” sean interdefinibles mostraría que, en el fondo, ninguna de ellas es primitiva[28]. Pues, en su opinión, si la lógica tiene conceptos fundamentales, estos debían ser independientes entre sí (*Cf.* Wittgenstein (1922, 5.451)). Además, Wittgenstein tampoco acepta expresiones como “anything implied by a true proposition is true” dentro del sistema formal. Recordemos que la alusión a expresiones del lenguaje natural era algo habitual en los *Principia*. El *modus ponens*, por ejemplo, no estaba escrito formalmente, sino que “if p is true, then if p implies q, q is true. This is a true proposition, but [...] we cannot express the principle symbolically” (Whitehead y Russell, 1910, p. 94). El uso del lenguaje natural para justificar reglas y operaciones del sistema desaparece completamente de Post (1921), y Wittgenstein es muy crítico con ello:

> The introduction of any new device into the symbolism of logic is necessarily a momentous event. In logic a new device should not be introduced in brackets or in a footnote with what one might call a completely innocent air. (Thus in Russell and Whitehead’s *Principia Mathematica* there occur definitions and primitive propositions expressed in words. Why this sudden appearance of words? It would requiere a justification, but none is given, or could be given, since the procedure is in fact illicit) (Wittgenstein, 1922, 5.452).

Finalmente, Wittgenstein cuestiona que Whitehead y Russell (1910) incluyan, entre sus proposiciones lógicas, al Axioma de Reducibilidad[29]. En su opinión, habría que distinguir entre las proposiciones cuya “validez general” es esencial de las que son válidas accidentalmente. Wittgenstein (1922, 6.1232) cree que, si el Axioma de Reducibilidad resulta ser verdadero, lo será “por una feliz casualidad”, ya que podemos imaginar perfectamente un mundo donde dicho axioma fuera falso. En cambio, las proposiciones lógicas (cuya “validez general” sí es esencial) no tienen nada que ver con la cuestión de cómo sea el mundo (Cf. Wittgenstein (1922, 6.1233). Wittgenstein confronta su enfoque con “the old conception of logic” de una manera que, nuevamente, recuerda a Lewis Lewis (1918, p. 354). Es más, lo que Wittgenstein explica a continuación encaja con la perspectiva de las “matemáticas sin significado” que proponía el propio Lewis unos años antes.

La idea de Wittgenstein es que, si conocemos la sintaxis lógica de nuestro lenguaje formal, entonces ya están dadas cuáles son las proposiciones lógicas del mismo (*Cf.* Wittgenstein (1922, 6.124)). Esta afirmación es algo desconcertante para el lógico contemporáneo, porque las proposiciones lógicas son típicamente

[28]“The interdefinability of Frege’s and Russell’s “primitive signs” of logic is enough to show that they are not primitive signs” (Wittgenstein, 1922, 5.42). Wittgenstein también parece rechazar la idea de que existen proposiciones primitivas, pues sostiene que “all propositions are of equal value” (Wittgenstein, 1922, 6.4).

[29]El Axioma de Reducibilidad garantizaría que el orden 1 de proposiciones (las llamadas “predicativas”) son suficientes para producir todos los conjuntos, incluido el de los números reales. En una carta a Henkin, Russell (1963) admitía que siempre vio dicho axioma como un parche.

caracterizadas como las que son verdaderas en toda interpretación. Para aclarar el punto, considérese la siguiente cita del *Tractatus*:

> One can calculate whether a proposition belongs to logic, by calculating the logical properties of the symbol. And this is what we do when we "prove" a logical proposition. For, without bothering about sense or meaning, we construct the logical proposition out of others using only *rules that deal with signs* (Wittgenstein, 1922, 6.126).

Esta cita es, en mi opinión, fundamental. Wittgenstein está diciendo que existe un procedimiento para *calcular*, de manera puramente sintáctica (o sea, sin referencia alguna a los sentidos o los significados) si una proposición pertenece o no a la lógica[30]. No obstante, él no parece distinguir entre hacer una tabla de verdad y encontrar una prueba, pues parece asumir que la demostración es un medio mecánico auxiliar más para el reconocimiento de tautologías. De este modo, asegura ambiguamente que, mediante la aplicación de ciertas operaciones, se pueden generar nuevas proposiciones lógicas a partir de las que ya tenemos:

> The proof of logical propositions consists in the following process: we produce them out of other logical propositions by successively applying certain operations that always generate further tautologies out of the initial ones. (And in fact only tautologies follow from a tautology) (Wittgenstein, 1922, 6.126).

En resumen, creo que hay evidencia suficiente para considerar que la perspectiva de Wittgenstein en el *Tractatus* es tan sintáctica como la de Lewis (1918) y Post (1921). Pues, como vimos más arriba, "we construct the logical proposition out of others using only rules that deal with signs". El significado de estos signos no pertenece al sistema formal propiamente dicho y debe estar al margen de cualquier definición, regla u operación introducida dentro del mismo. Las proposiciones lógicas se ponen de manifiesto calculando. "To produce or reveal necessities previously unnoticed –this is the peculiar artistry of his [the mathematician's] work" (Lewis, 1918, p. 360).

2.5. La estrategia sintáctica y la escuela de Hilbert

En otro lugar[31], vimos que el procedimiento de decisión basado en formas normales (disyuntiva y conjuntiva) era algo frecuente en la escuela de Hilbert. A partir de este método, Hilbert (1917) y Bernays (1918) lograron demostrar la Post completud de los axiomas 1-5 y, usando también corrección, que la lógica proposicional era completa. La pregunta es, pues, ¿cabría atribuir a la escuela de

[30] Recordemos que, para Post, "our most important theorem gives a uniform method for testing the truth of any proposition of the system" Post (1921, p. 265).

[31] *Cf.* Aranda (2019a).

Hilbert la "estrategia sintáctica" de Lewis, Post y Wittgenstein? ¿Mostraron Hilbert y Bernays ese recelo ante los significados?

El objetivo de Bernays (1918) era, precisamente, investigar el fragmento proposicional de los *Principia* desde el *método axiomático*[32], o sea, poniendo énfasis en las cuestiones de consistencia, independencia y completud del sistema formal. El principal resultado de su *Habilitationsschrift* fue mostrar que, mientras el cuarto axioma de la lógica proposicional era redundante (es decir, podía obtenerse deductivamente a partir de los demás), el resto sí eran independientes entre sí. Explicando los antecedentes de sus pruebas de independencia, Bernays cita, en la introducción, a Schröder (*Cf.* Bernays (1918, p. 233)).

Aunque, como señala Ewald (2013, 224), no está muy claro cuánto de Schröder se había leído en la escuela de Hilbert, Bernays (1918, p. 233) se refiere explícitamente a una demostración de Schröder "muy complicada" que había sido simplificada por él mismo. No obstante, la estrategia adoptada sigue siendo la misma. A este respecto, se cita el *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, la duodécima sección, donde podemos leer lo siguiente:

> La independencia de la proposición φ del grupo de proposiciones Γ solo puede ser mostrada sustituyendo ciertos objetos, aquellos a los que nos hemos referido, por otros objetos. En otras palabras, los símbolos que representaban esos objetos reciben un nuevo significado, a la luz del cual las proposiciones son estudiadas en su aplicación a un nuevo campo de estudio[33] (Schröder, 1890, p. 288).

Como se advierte, una prueba de independencia no se puede llevar a cabo al margen de los significados. Se trata, en efecto, de interpretar la proposición φ y el grupo de proposiciones Γ en un sistema de objetos diferente a su modelo habitual, de tal forma que todas las proposiciones de Γ sean verdaderas y φ sea falsa. Así, la demostración de independencia de los axiomas de la lógica proposicional que detallan Hilbert y Ackermann (1928, pp. 837-38), inspirada[34], por supuesto, en la de Bernays (1918), recurre a diferentes "sistemas de objetos". Estas nuevas interpretaciones se basan, en su mayoría, en aritmética modular, por lo que los valores de verdad de las fórmulas no serán 0 y 1, sino clases residuales.

Por esta razón, podemos concluir que para Hilbert y Bernays las interpretaciones de los signos desempeñaban, al menos en el nivel de la metamatemática, un

[32]"With this, we have set up a system of axioms for logic. It should be emphasized that, as a characteristic difference between this system and arithmetic, for all arising expressions only two values, 0 and 1, are considered. As for any other axiomatic system, questions about consistency, logical dependence and completeness can also arise" (Hilbert, 1917, p. 109).

[33]"Die Unabhängigkeit des Satzes φ von der Satzgruppe Γ nur darthun lassen, indem wir für gewisse Objekte, von denen hierin die Rede war, durchweg andere Objekte substituiren, m. a. W. Den Symbolen, welche uns diese Objekte darstellten, eine neue Bedeutung unterlegen, die beiden Partieen von Sätzen in ihrer Anwendung auf ein weiteres Untersuchungsfeld studiren" (Schröder, 1890, p. 288; la traducción es mía).

[34]*Cf.* Hilbert y Ackermann (1928, p. 837, fn. 1).

papel decisivo. Es cierto, no obstante, que ni Lewis (1918), ni Post (1921) ni Wittgenstein (1922) trataron de demostrar independencia. Pero, en lo que respecta a la completud, quizás esta actitud más "receptiva" ante la semántica resultó diferencial. Lo que quiero decir (y esto son solo conjeturas) es que uno puede desatender los significados y lograr una clasificación puramente sintáctica de las verdades lógicas cuando la lógica es decidible. Pero, cuando la lógica no lo es, ¿de qué manera puedo yo caracterizar ese conjunto de fórmulas destacadas? Únicamente me queda apelar a las definiciones de tipo semántico (o sea, a las interpretaciones) y preguntarme si mi cálculo me permite generar *todas* las fórmulas de ese conjunto[35].

En su tesis doctoral, Post (1921) asegura que, en próximos trabajos, tratará de extender su método de tablas de verdad a fragmentos más amplios de los *Principia*. "This general procedure might be extended to other portions of *Principia*, and we hope at some future time to present the beginning of such an attempt" (Post, 1921, pp. 265-66). Sin embargo, Post no logró su objetivo, ya que la lógica de primer orden no es decidible. De hecho, en 1941 él mismo escribirá un artículo (que no sería aceptado para su publicación) contando que ya intuía este resultado antes de que lo demostrara Church (*Cf.* Post (2004, pp. 340-41)). Esto muestra las limitaciones de la estrategia sintáctica que siguieron él y Lewis, pues tampoco obtuvo ese "premio de consolación" que habría sido la completud.

Por otro lado, Von Plato (2017, pp. 151-52) es bastante duro con la lógica de Wittgenstein en el *Tractatus*. La tesis de von Plato es que Wittgenstein tuvo muchas dificultades para entender el funcionamiento de los cuantificadores y critica que extendiera el concepto de "tautología" a fórmulas cuantificadas de primer orden[36]. La regla de generalización no está presente en Wittgenstein (1922), pero tampoco lo está en ninguna de sus obras posteriores. Sin esta regla, introducida por primera vez en Frege (1967, sección 11), no podemos hablar de lógica de primer orden. Wittgenstein representará la generalización como un "producto lógico" $(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge ...)$ y la particularización como una "suma lógica" $(P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee ...)$. Así, en realidad Wittgenstein deposita demasiada confianza en su método de tablas de verdad, presuponiendo que las fórmulas de primer orden heredan su validez de las fórmulas proposicionales que, a su juicio, *las constituyen*. Aunque esta idea podría servirnos para fórmulas como $\forall xyzR(x, y, z) \vee \neg\forall xyzR(x, y, z)$, que pueden ser reducidas a $p \vee \neg p$, ¿qué hacemos con fórmulas válidas de la forma $\forall xyz(R(x, y, z) \vee \neg R(x, y, z))$?

Por tanto, parece que la estrategia sintáctica no tuvo demasiado recorrido en las décadas posteriores. Aunque el recelo hacia los significados ha seguido ahí (y prueba de ello es el texto de Church citado más arriba), la irrupción de la semántica en la obra de Tarski permitió que la lógica formal se consolidara tal y como la conocemos hoy.

[35] *Cf.* Alonso (2013, p. 81).

[36] "The *Principia* made it clear that the notion of tautology does not extend to the quantifiers [...] My conclusion is, unfortunately, that the impatient philosopher had never made it to page 130+ of the *Principia*!" (Von Plato, 2017, p. 151).

2.6. Conclusiones

En este artículo, hemos tratado de rastrear históricamente la creencia de que, aunque sirva como guía de nuestras intuiciones lógicas, la semántica carece del rigor que aportan la sintaxis y el cálculo. Esta creencia tiene su origen en lo que Alonso (2013, p. 80) denomina "el principio de prioridad de la sintaxis" y en la estrategia que, de acuerdo con Manzano y Alonso (2014, p. 7), se habría adoptado en lógica durante la década de 1920. Así, se trataba de definir un criterio puramente sintáctico para clasificar las proposiciones en las que son lógicas y las que no. En Post (1921), el método de tablas de verdad sirve a ese propósito y encontramos, además, cierto recelo hacia los significados, que se consideran ajenos al sistema formal propiamente dicho.

De hecho, hay diferencias significativas entre Post (1921) y los *Principia*. Mientras que Whitehead y Russell (1910, p. 93) sostenían que una función proposicional p pertenece a la lógica syss puede ser aseverada a pesar de sus constituyentes indeterminados, para Post (1921) p es una proposición lógica syss así lo dice su tabla de verdad (en este punto, Post y Wittgenstein se tocan). Expresiones como "anything implied by a true proposition is true" dejan de considerarse proposiciones primitivas y hay una distinción clara entre los teoremas que se prueban *dentro* del sistema formal y los que se demuestran *acerca* del mismo. No en vano, Post (1921) prueba la completud y la corrección de la lógica proposicional, algo que no está formulado ni como problema a resolver en los *Principia*.

Estas diferencias responden a un cambio de enfoque motivado por lo que Lewis (1918, p. 354) llamaba la "concepción heterodoxa" de la lógica y las matemáticas. Desde este punto de vista, un sistema formal no sería más que un conjunto de secuencias de signos que manipulamos de acuerdo con reglas sintácticas cuya formulación no hace referencia alguna a la verdad o a los significados. Los parecidos entre la postura de Lewis y la de Wittgenstein (1922) son sorprendentes. Ambos critican que Whitehead y Russell (1910) incluyan explicaciones informales de las reglas y operaciones del sistema como proposiciones primitivas, llegando a rechazar, incluso, la propia idea de "proposición primitiva" e "idea primitiva" en lógica. Los significados son irrelevantes para la sintaxis lógica, y esta sintaxis lógica es suficiente para determinar cuáles son las proposiciones lógicas de un determinado lenguaje formal.

No obstante, esta "estrategia sintáctica" no fue la única adoptada. En la escuela de Hilbert, la necesidad de encontrar pruebas de independencia abrió la puerta a los métodos de Schröder, basados en la idea moderna de "interpretación" que Bernays (1918) trasladó exitosamente a los axiomas de la lógica proposicional. Este concepto de interpretación permite caracterizar las proposiciones lógicas como aquellas que son "válidas", lo cual tuvo que ser rigurosamente delimitado antes de probar la completud de la lógica de primer orden (que no es decidible). La simple trasposición de la estrategia sintáctica a la lógica de primer orden fracasó, ya que, como es sabido, Post no logró extender su método más allá del nivel proposicional. De hecho, parece que Wittgenstein no llegó a vislumbrar la importancia de los cuantificadores, pues habría sobreestimado la aplicabilidad de sus propias tablas de verdad.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la beca FPU15/00830, concedida por el Ministerio de Educación español.

Bibliografía

Alonso, E. (2013). La completitud como propiedad redundante. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, 2:74–86.

Aranda, V. (2019a). Completud débil y Post completud en la escuela de Hilbert. *Revista de Humanidades de Valparaíso*, 14:449–466.

Aranda, V. (2019b). La verdad lógica en el fragmento proposicional de los *Principia* y sus implicaciones metalógicas. *Andamios. Revista de Investigación Social*, 41:43–61.

Barker-Plummer, D., Barwise, J., y Etchemendy, J. (2011). *Language, Proof, and Logic*. Stanford: Center for the Study of Language and Information.

Bernays, P. (1918). Beiträge zur axiomatischen behandlung des logik-kalküls. In Ewald, William y Sieg, W., editor, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933*, page 231–269. Dordrecht: Springer.

Boole, G. (1854). *An investigation of the laws of thought: on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Cambridge: MacMillan and Co.

Church, A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: Princeton University Press.

Frege, G. (1967). Begriffsschrift [1879]. In Van Heijenoort, J., editor, *From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic*, pages 1–82. Harvard: Harvard University Press.

Hilbert, D. (1917). Prinzipien der mathematik. In Ewald, W. y Sieg, W., editors, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933*, pages 59–219. Dordrecht: Springer.

Hilbert, D. y Ackermann, W. (1928). Grundzüge der theoretischen logik. In Ewald, W. y Sieg, W., editors, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933*, pages 809–916. Dordrecht: Springer.

Kleene, S. C. (1974). *Introducción a la metamatemática*. Madrid: Tecnos.

Lewis, C. I. (1918). *A survey of symbolic logic*. Berkeley y Los Angeles: University of California Press.

Manzano, M. y Alonso, E. (2014). Completeness: From Gödel to Henkin. *History and Philosophy of Logic*, 35(1):50–75.

Peano, G. (1906). Additione. *Revista de mathematica*, 8:143–157.

Post, E. L. (1921). Introduction to a general theory of elementary propositions. In Van Heijenoort, J., editor, *From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic*, page 264–283. Harvard: Harvard University Press.

Post, E. L. (2004). Undecidable propositions. account of an anticipation [1941]. In Davis, M., editor, *The Undecidable*, pages 338–433. Nueva York: Dover.

Ramsey, F. P. (1925). The foundations of mathematics. In Mellor, D., editor, *Foundations*, pages 152–212. Londres: Kegan Paul.

Russell, B. (1903). *Principles of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Russell, B. (1963). Letter to Henkin. In Grattan-Guinness, I., editor, *The search for mathematical roots, 1870-1940*, page 592–593. Princeton: Princeton University Press.

Schröder, E. (1890). *Vorlesungen über die algebra der logik*, volume 1. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Tarski, A. (1933). The concept of truth in formalized languages. In Corcoran, J., editor, *Logic, semantics, metamathematics*, page 152–278. Indianapolis: Hackett.

Von Plato, J. (2017). *The great formal machinery works: Theories of deduction and computation at the origins of the digital age*. Princeton: Princeton University Press.

Whitehead, A. N. y Russell, B. (1910). *Principia Mathematica*, volume 1. Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus logico-philosophicus*. London: Kegan Paul.